سطوح الدرجة الثانية

د. منير الترك

رياضيات 3

تمرين:

احسب التكامل التالي:

$$I = \iint_D e^{-(x^2+xy+y^2)}\ d(x)d(y)$$

$$D \equiv X^2 + xy + y^2 \le 1$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|J| = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x^2 + yx + y^2 = v^2 + u^2$$

$$I = \iint e^{-(u^2+v^2)} dudv$$

نتحول الى الإحداثيات القطبية:

$$u^2 + v^2 \le 1$$

$$\theta : 0 \to 2\pi$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}} \iint e^{-r^2} r dr d\theta$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{0}^{2\pi} (\int_{0}^{1} e^{-r^2} r dr) d\theta$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{0}^{2\pi} \left\{ -\frac{1}{2} (e^{-1} - e^{0}) \right\}$$

$$I = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}} (1 - \frac{1}{e}$$

سطوح الدرجة الثانية

نعلم أن المستوي هو أبسط أنواع السطوح وأن معادلة المستوي هي عبارة عن معادلة خطية في **X,Y,Z** أما سطوح الدرجة الثانية فمعادلتهما من الشكل: $F(X, Y, Z) = 0$ حيث أن كلا من **X,Y,Z** أو بعضها من الدرجة الثانية في المتحولات **x,y,z** أما الشكل العام لها هو :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0$$

واذا كانت الحدود المستطيلة غير موجودة وكانت **A=B=C** فإن المعادلة العامة للسطوح تتحول الى معادلة كرة أما تعريف الكرة فهي عبارة عن مجموعة النقاط في الفراغ التي تبعد عن نقطة ثابتة بعدا ثابتا والنقطة الثابتة ندعوها مركز الكرة وتعطى معادلة الكرة التي مركزها $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ونصف قطرها **r** بالشكل: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$

تمرين:

عين مركز ونصف قطر الكرة: $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 8z = 8$

يمكن تعيين نصف القطر بالإتمام الى مربع كامل نضيف ونطرح مربع نصف أمثال **x**

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 4)^2 = 8 + 4 + 9 + 16 = 37$$

مركز الدائرة $(-2,3,-4)$

نصف قطر الدائرة $\sqrt{37}$

الإحداثيات الأسطوانية

يمكن تعيين نقطة بالفراغ بالإحداثيات الأسطوانية وذلك بالثلاثية (r,θ,z)

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$-\infty \leq z \leq +\infty$$

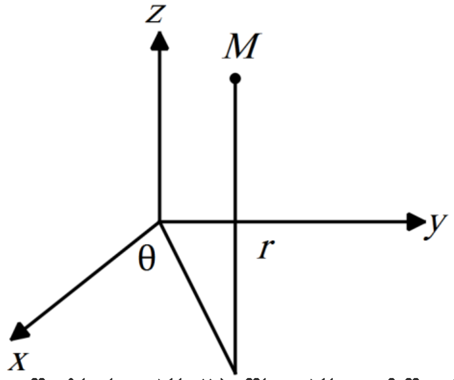
$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$z = z$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$tg\theta = \frac{y}{x}$$



ونستخدم الإحداثيات الاسطوانية عندما تكون المسألة المطروحة لها شكل تناظري محوري

إن المعادلة **r=c** هذا يعطي أنها تمثل معادلة أسطوانة محورها **OZ**

الإحداثيات الكروية

تستخدم عندما يكون لدينا بالمسألة المطروحة شكل تناظر مركزي أو جزء من تناظر مركزي وتسمى الثلاثية (r,θ,φ) بالإحداثيات الكروية فيرتسم نصف كرة

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

إذا ثبتنا θ وتركنا φ تتغير نحصل على مخروط رأسه 0 وزاويته θ ومحوره **OZ**

$\theta = C$ معادلة مخروط أما المعادلة **r=a** ثبتنا **r** وتركنا θ,φ تتغيران فنحصل على كرة نصف قطرها

A وتعطى المعادلات الكروية بالشكل:

$$x = r\sin\theta.\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta.\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

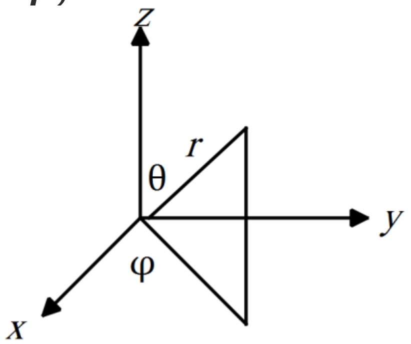
$$x^2 + y^2 = r^2(\sin^2\theta.\cos^2\varphi + \sin^2\theta.\sin^2\varphi)$$

$$= r^2.\sin^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$

$$x^2 + y^2 = r^2.\sin^2\theta$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$



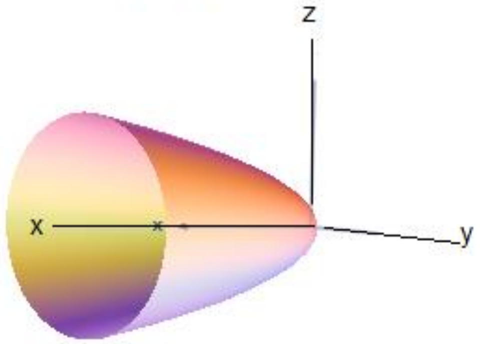
بعض أشكال السطوح ومعادلاتها

1)مجسم القطع المكافئ الناقصي

ومن أشكاله:

معادلته من الشكل

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = x$$

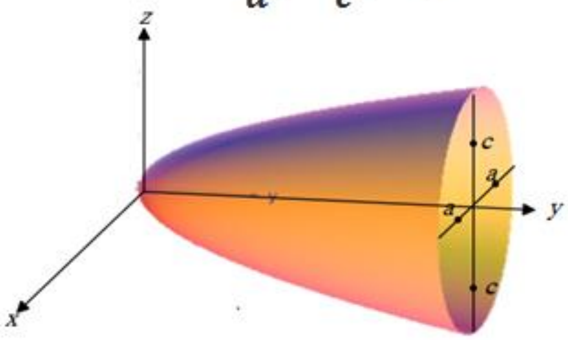


محوره منطبق على OX

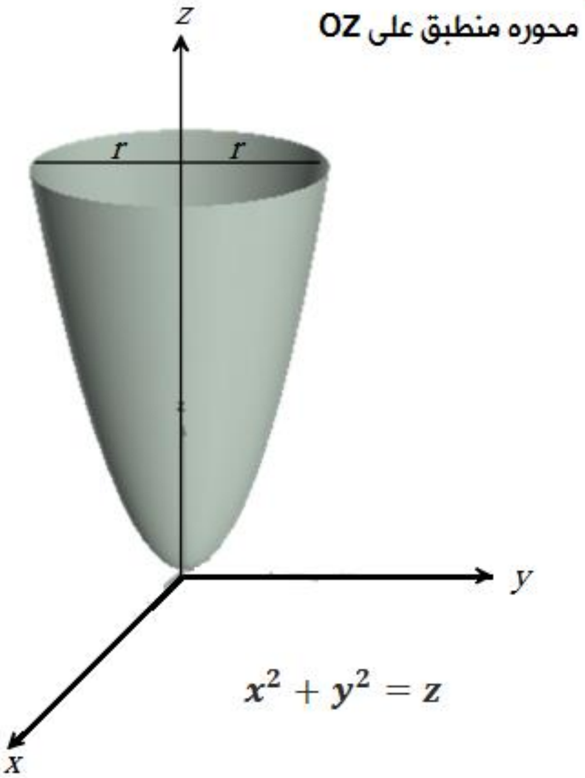
محوره منطبق على OY

شكل معادلته:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = y$$

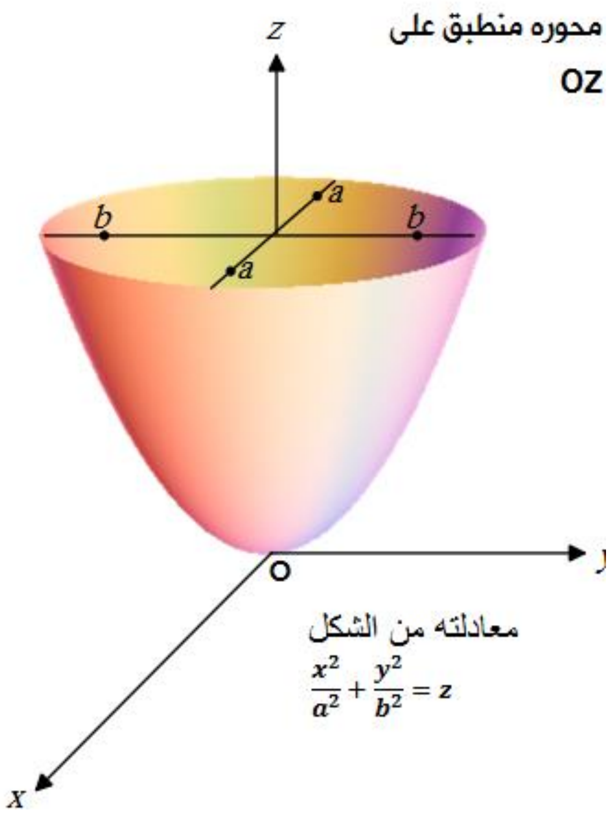


وهذين الشكلين يمثلان قطعان مكافئان ناقصان فوهة المجسم تمثل قطع ناقص



يمثل هذا الشكل مجسم قطع مكافئ دوراني

فوهة المجسم تمثل دائرة



يمثل قطع مكافئ ناقصي

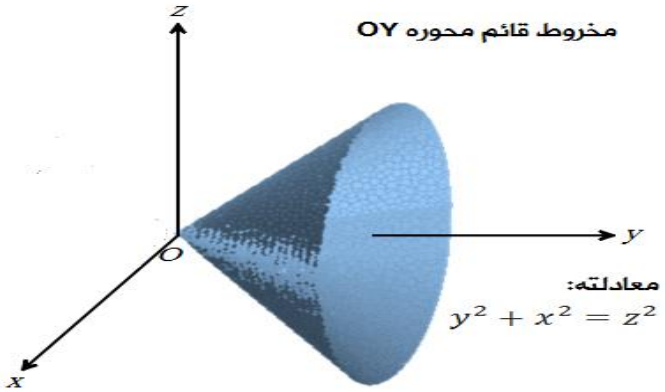
2) المخروط:

تعريفه: هو السطح الذي يرسمه المستقيم ويتحرك على منحني في الفراغ بحيث يبقى مارا بنقطة ثابتة

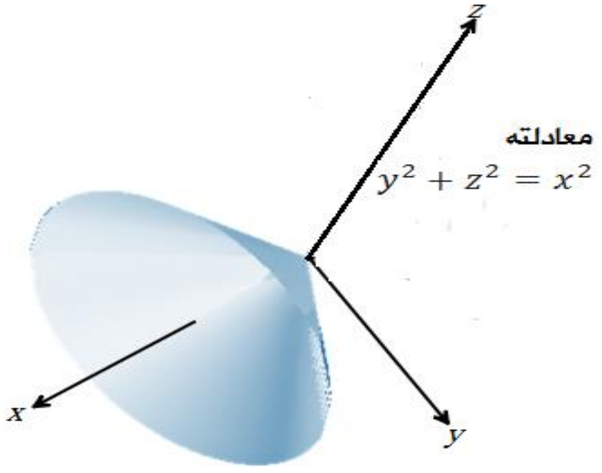
معادلته بالشكل العام:

$$X^2 + Y^2 = tg(\alpha)Z^2$$

ولكن عندما $\alpha = \frac{\pi}{4}$ يصبح لدينا المخروط القائم ونميز ثلاث حالات:

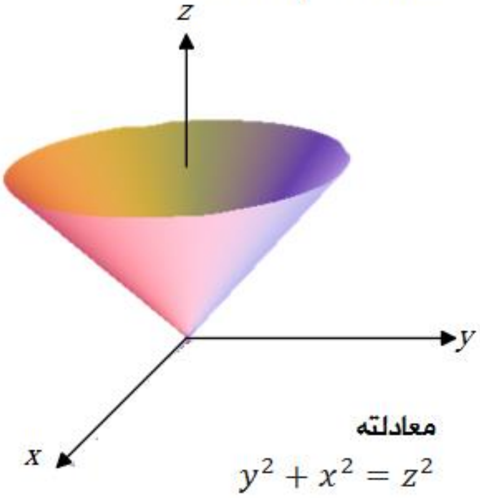


مخروط قائم محوره ox



معادلته
$y^2 + z^2 = x^2$

مخروط قائم محوره OZ



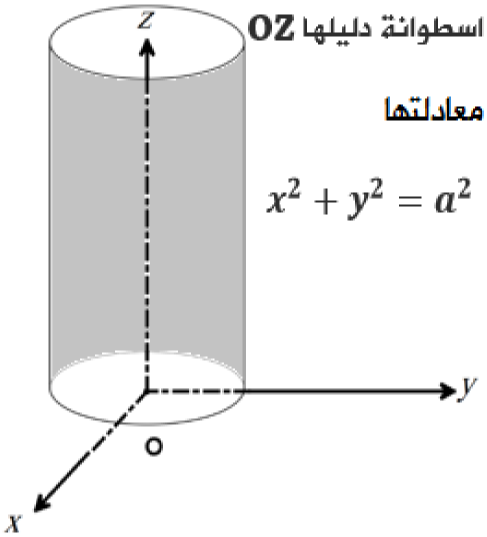
معادلته
$y^2 + x^2 = z^2$

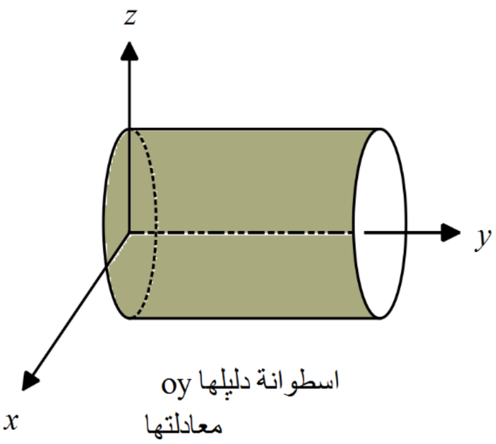
3) الأسطوانة:

اسطوانة دليلها OZ

معادلتها

$x^2 + y^2 = a^2$



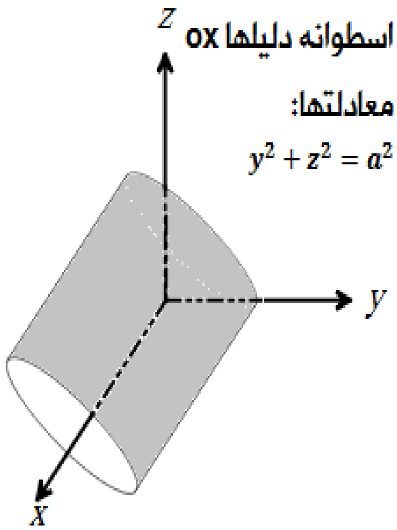


اسطوانة دليلها oy
معادلتها
$x^2 + z^2 = a^2$

اسطوانه دليلها ox

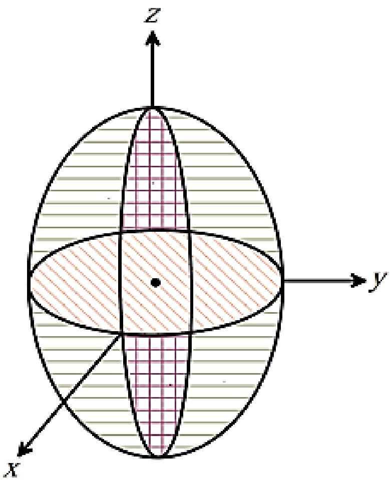
معادلتها:

$y^2 + z^2 = a^2$



4) مجسم القطع ناقص الدوراني:

معادلته: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2$



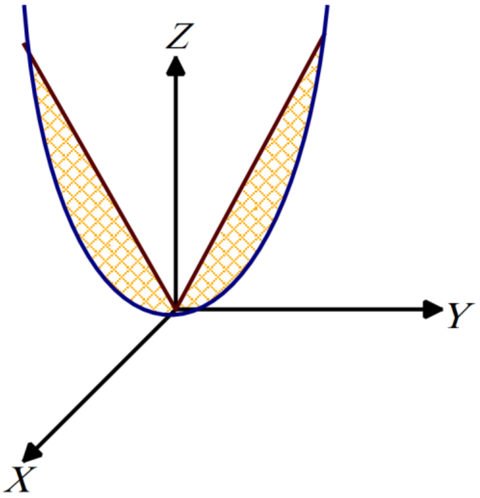
مجسم قطع ناقص دوراني

مثال(1):

ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين

و هي معادلة مجسم قطع مكافئ دوراني $S_1 = Z = X^2 + Y^2$

و هي مخروط معادلة $S_2 = X^2 + Y^2 = 4Z^2$



مثال(2):

ارسم المنطقة الفراغية الواقعة:

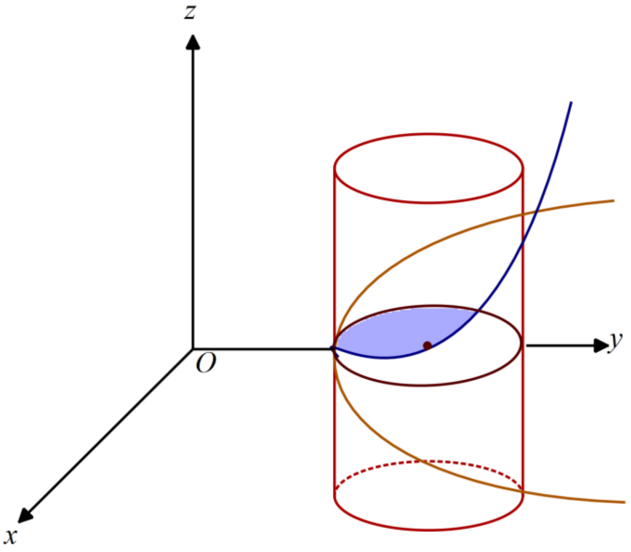
المستوي $Z = 0$

و المنطقة داخل الاسطوانة $x^2 + y^2 = 2x$

و الاسطوانة المكافئية $z^2 = 4x$

و النصف من العلوي $(x-1)^2 + y^2 = 1$

الحل:



الوظيفة:

احسب التكاملات التالية:

$$I = \iint_D \frac{d(x)d(y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{4}}}$$

$$D \equiv x^2 + y^2 \leq a^2$$

$$2)\ I = \iint_D \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} d(x)d(y)$$

حيث أن D هي الربع الموجب من المستوي XOY

$$3)\ I = \iint_D \frac{Y}{X^2} d(x)d(y)$$

حيث أن D في الثمن الموجب الأول في المستوي و الكائنة خارج الدائرة $x^2 + y^2 = 4$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

و المستقيم $y = x$

$$4) I = \iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{5}{2}}} d(x)d(y)$$

$$; D \equiv \ y > 0$$